# 単振動の量子化を試みる

|  | 組 |  | 番 |  |
|---|---|---|---|---|

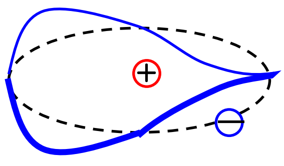
水素原子では、電子がクーロン力で等速円運動しているのが量子化されたが、物質は原子や電子の集まりで、それら束縛された物体の運動は単振動で近似できる。単振動する物体の量子化を試みて、物質に共通して現れる量子現象を考える。

ばね定数 $k$ の弾性力 $F=kx$ を受ける質量 $m$ の物体を考えると、次のように単振動している。

$r = A\sin(2\pi\nu t)$　$v = 2\pi\nu A\cos(2\pi\nu t)$　　ただし、$2\pi\nu = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$　　A：初期条件で決まる振幅

水素原子の量子化条件は、

$$\frac{\text{円周}}{\text{波長}} = \text{整数}\cdot\cdot\cdot\ (*)$$



であった。そこで、単振動の円周に相当する量は何か考える。

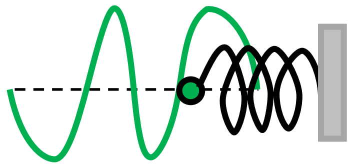
往復の変位 −A → A → −A とすれば、

$$\frac{2A\times2}{\lambda} = n$$

しかし分母のド・ブロイ波長$\lambda = \frac{h}{mv}$は単振動では $v$ の時間変化によって一定値ではなくこれは使えない。。

位置 $r$ が変化していくと波長 λ も変化するので、変化していくものの合計として考えて

$$\int_{-A}^{A}\frac{dr}{\lambda(r)}\times 2 = n\cdot\cdot\cdot\ (**)$$



（×2 は往復なので）

としてみることにする。

ド・ブロイ波長$\lambda = \frac{h}{mv}$、を $t$ ではなく $r$ の関数として表すため、$\sin^2(2\pi\nu t)+\cos^2(2\pi\nu t)=1$　を使う。

$$\sin^2(2\pi\nu t)+\cos^2(2\pi\nu t) = \left(\frac{r}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{2\pi\nu A}\right)^2 = 1$$

これから $v$ を $r$ で表すと

$v = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}$

したがってド・ブロイ波長 λ を $v$ を使わずに $r$、$h$, $m$, $A$, $\nu$であらわすと

$$\lambda(r) = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\boxed{\phantom{xxxxxxxxxx}}}$$

となる。これを量子条件の積分の式に代入して

$$\int_{-A}^{A}\frac{dr}{\lambda(r)}\times 2=\int_{-A}^{A}\frac{dr}{\left(\dfrac{h}{\boxed{\phantom{xxxxxx}}}\right)}\times 2=n$$

ここで積分を実行するため変数変換をする。$\frac{r}{A}=\sin\theta$ と置くと、$dr=A\cos(\theta)d\theta$ で $-\mathrm{A}\le \mathrm{r}\le \mathrm{A}$ は $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$\int_{-A}^{A}\frac{dr}{\lambda(r)}\times 2=\frac{\boxed{\phantom{xxxxxx}}}{h}A^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=n$$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}$ であるから、量子条件はつぎのように表される。

$$\frac{\boxed{\phantom{xxxxxx}}}{h}A^2=n$$

$2\pi\nu=\sqrt{\frac{k}{m}}$を使って$\nu$を $k,m$ で表し、$A^2$ を $n$ , $h$ , $m$ , $k$ で表すと

$$A^2=\frac{nh}{\boxed{\phantom{xxxxxx}}}$$

したがって振幅 $A$ は自由な値が許されず、$n$=1,2,3⋯によってとびとびの振幅の大きさだけが生じる。

次にエネルギー準位を考えると

エネルギーは保存されるので、変位最大 $r=A$ で速度が $v=0$ のところで計算すればいい。

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}kA^2$$

したがってエネルギーを $n$ , $h$ , $m$ , $k$ で表すと

$$\mathrm{E}_n=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\boxed{\phantom{xx}}}{\boxed{\phantom{xx}}}}\,nh$$

これを単振動の振動数 $\nu$ $\left(=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$，量子数 $n$，および $h$を用いて表すと

$E_n=nh\boxed{\phantom{xx}}$ となる。

したがってエネルギー準位は $n$=1,2,3⋯によって$h\nu$の整数倍の値だけが生じる。

　バネによる単振動を量子化すると、$h\nu$という量子の整数倍のエネルギーしか出てこないので、同じエネルギーを持った物質が１個、２個、３個・・・とある状況に似ていて、**オンと名付けて粒子のように扱う。

結晶の熱による原子の振動をフォノン、磁化の振動をマグノン、電磁場の振動をフォトン等など。

こうした物質中や真空中の様々な粒子の生成消滅は『場の量子論』と呼ばれている。